Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Stochastische Finanzmathematik I Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 10

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und Z ein adaptierter Prozess in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Snellscher Einhüllender U. Ferner sei $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$, $\mathcal{T}_\tau := \{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T} | \sigma \ge \tau\}$ und $\sigma_{\min}^{(\tau)} := \min\{s \ge \tau | Z_s = U_s\}$. Zeigen Sie:

   (i) Für $t = 0, ..., T$, $\sigma \in \mathcal{T}_\tau$ gilt auf $\{\tau = t\}$, $\mathbb{P}$-fast sicher:
   $$\mathbb{E}\left[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_\tau\right] \;=\; \mathbb{E}\left[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t\right].$$

   (ii) Es gilt:
   $$U_\tau \;=\; \mathbb{E}\left[Z_{\sigma_{\min}^{(\tau)}} \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right] \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma\in\mathcal{T}_\tau} \mathbb{E}\left[Z_\sigma \mid \mathcal{F}_\tau\right].$$

2. Sei ρ ein konvexes RM welches stetig von unten ist. Dann ist ρ stetig bzgl. punktweiser Konvergenz, d.h. ist (X_n) eine Folge beschränkter Auszahlungsprofile, die punktweise gegen X konvergiert, so konvergiert die Folge $(\rho(X_n))$ gegen $\rho(X)$.

3. Es sei ρ ein normiertes konvexes Risikomaß.

   (i) Sei $X \in \mathcal{X}$ beliebig. Zeigen Sie:

      (a) $\rho(X) \ge -\rho(-X)$.
      (b) $\rho(\lambda X) \ge \lambda\rho(X)$ für alle $\lambda \in (-\infty, 0]$.
      (c) $X \le 0$ impliziert $\rho(X) \ge 0$.

   (ii) Es sei ρ ein normiertes monetäres Risikomaß. Zeigen Sie, dass jeweils zwei der folgenden Eigenschaften

   - Konvexität
   - positive Homogenität
   - Subadditivität

   immer die dritte implizieren.