Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I Wintersemester 2018/19

ÜBUNGSBLATT 11

1. Sei Y_1 eine "short position" in einem Wertpapier mit log-normal-Verteilung, also

$$Y_1 = \pi - S$$

mit $S = e^Z$, wobei Z normalverteilt ist mit $N(m, \sigma^2)$.

- Bestimme $V@R_\alpha(Y_1)$ für $\alpha \in (0,1)$.
- Seien $Y_1, Y_2, \cdots$ unabhängig und identisch verteilt. Zeige für $\alpha \in (0,1)$:

$$V@R_\alpha\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \quad \longrightarrow \quad -E[Y_1].$$

- Für welche Parameterwerte α wird für große n die Konvexität verletzt?

2. Es sei ρ ein normiertes konvexes Risikomaß auf der Menge $\mathcal{X} = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. ρ heißt *relevant*, wenn für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\mathbb{P}[A] > 0 \quad \text{impliziert} \quad \rho(-\mathbf{1}_A) > 0.$$

Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A}_\rho \cap L^\infty_- = \{0\}$, so ist ρ relevant. Dabei bezeichnet $\mathcal{A}_\rho$ die Akzeptanzmenge von ρ und

$$L^\infty_- \; = \; \{X \in \mathcal{X} \, : \, X \leq 0, \ \mathbb{P}\text{-f.s.}\}\,.$$

3. Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller reellen Funktionen X auf einer endlichen Menge Ω von Szenarien. Zu d "Standardrisiken" X^i mit "margin requirements" $\psi(X^i)$ $(i = 1 \cdots d)$ sei

$$C := \left\{ \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (X^i + \psi(X^i)) : \ \alpha_i \geq 0 \right\}$$

und

$$\mathcal{A} = C + \mathcal{L}^0_+ = \{X \in \mathcal{X} : \ X \geq Y \text{ für ein } Y \in C\}.$$

Man zeige:

- $\mathcal{A}$ ist ein abgeschlossener konvexer Kegel.
- Ist $C \cap \mathcal{L}^0_- = \{0\}$, so ist $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}^0_- = \{0\}$. Insbesondere definiert dann

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) := \inf\{m : \ m + X \in \mathcal{A}\}$$

ein relevantes kohärentes Risikomaß.