Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Stochastische Finanzmathematik I Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 1

1. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (Lemma 2.3 aus der Vorlesung):

   (i) Im Finanzmarktmodell gibt es eine Arbitragemöglichkeit.

   (ii) Es existiert ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^d$, so dass gilt:
   $$\mathbb{P}\left[\xi \cdot S \ \geq \ (1+r)\xi \cdot \pi\right] \ = \ 1 \quad \text{ und } \quad \mathbb{P}\left[\xi \cdot S \ > \ (1+r)\xi \cdot \pi\right] \ > \ 0.$$

   (iii) Es gibt eine selbstfinanzierende Arbitragemöglichkeit.

2. Gegeben sei ein Finanzmarkt bestehend aus einer risikofreien Anlage und zwei Aktien. Weiter sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Die risikofreie Anlage habe einen Zinssatz von 0.4, d.h. $\pi^0 = 1$ und $S^0 = 1.4$. Der Aktienpreis heute sei $\pi = (\pi^1, \pi^2) = (2, 4)$. Für die mögliche Kursentwicklung der Aktien gelte $S(\omega_1) = (2, 4)$ und $S(\omega_2) = (5, 7)$, wobei beide Szenarien mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreten. Man zeige, dass das Modell nicht arbitragefrei ist, indem man eine Handelsstrategie $\bar{\xi}$ angibt, die zur Arbitrage führt. Geben Sie einen alternativen Preisvektor π für die Aktien an, so dass der Markt arbitragefrei ist.

3. Wir betrachten das folgende Finanzmarktmodell mit Zinsrate $r \geq 0$,
   $$\Omega \ = \ \{\omega_1, \omega_2\}, \quad p \ := \ \mathbb{P}[\{\omega_1\}] \ = \ \frac{1}{2}$$
   und einem risikobehafteten Wertpapier mit Anfangswerten $\pi^1 = 100$ und Wertentwicklung $S^1(\omega_1) = 120$, $S^1(\omega_2) = 90$. Ferner sei $C = (S^1 - K)^+$ eine Call-Option auf S^1 mit Ausübungspreis $K = 100$.

   (i) Für welche Werte von r ist das Modell arbitragefrei? Bestimmen Sie das risikoneutrale Maß $\mathbb{P}^*$, also den Wert $p^* := \mathbb{P}^*[\{\omega_1\}]$.

   (ii) Finden Sie eine Absicherungsstrategie $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1)$ für den Call, d.h. bestimmen Sie $\xi^0, \xi^1 \in \mathbb{R}$, so dass
   $$C \ = \ \xi^0(1+r) + \xi^1 S^1.$$
   Zeigen Sie, dass die für die Absicherungsstrategie nötige Anfangsinvestition mit dem risikoneutralen Preis $\mathbb{E}^*[\frac{C}{1+r}]$ übereinstimmt.

   (iii) Zeigen Sie, dass es für $r \neq \frac{1}{20}$ in diesem Modell Arbitragemöglichkeiten gibt, wenn man als Preis des Calls den Erwartungswert $\mathbb{E}[\frac{C}{1+r}]$ unter dem ursprünglichen Maß berechnet. Geben Sie eine Arbitragestrategie an, deren Gewinn gleich der Differenz
   $$\left| \mathbb{E}\left[\frac{C}{1+r}\right] - \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] \right|$$
   ist.