Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Stochastische Finanzmathematik I Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 2

1. In der Vorlesung *Stochastische Finanzmathematik I* sitzen 40% Fans des FC Bayern München (FCB), 30% Fans von Borussia Dortmund (BVB), 10% Fans von Schalke 04 (S04) und 20% Fans von anderen Teams aus der 1. Fußball-Bundesliga. Ein Wettbüro bietet folgende vier Wetten an: „Deutscher Meister wird Team i", $i \in \{\text{FCB, BVB, S04, Andere}\}$, mit den Quoten $x_i : y_i$ $(x_i, y_i > 0)$, d.h. für jeden eingesetzten Euro auf Team i erhält der Wettende $1 + \frac{x_i}{y_i}$, falls Team i Meister wird. Der Kursleiter sammelt von allen Studierenden einen Euro ein und setzt den Betrag auf die vier Wetten entsprechend der Fanverteilung. Das Wettbüro glaubt, dass Team i mit Wahrscheinlichkeit p_i Meister wird, wobei gilt: $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}05$ und $p_4 = 0{,}15$.

   (i) Formulieren Sie das Marktmodell $(\bar{\pi}, \bar{S})$ bestehend aus den vier Wetten und einem risikolosen Sparschwein mit $r = 0$. Geben Sie weiter die entsprechende selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^5$ an.

   (ii) Wie müsste das Wettbüro die Quoten setzen, damit für jede Wette die erwarteten diskontierten Gewinne gleich Null sind?

   (iii) Bestimmen Sie die Wettquoten so, dass die Wahrscheinlichkeit für das Wettbüro, bei der Handelsstrategie $\bar{\xi}$ aus (i) einen Verlust zu machen, minimal ist.

2. Wir betrachten ein Finanzmarktmodell auf $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, bestehend aus einem Bond mit Zinsrate $r = 0$ und nur einem risikobehafteten Wertpapier $(d = 1)$ mit

$$\pi^1 = 1, \qquad 0 < S^1(\omega_1) < S^1(\omega_2) < S^1(\omega_3), \qquad \mathbb{P}[\{\omega_i\}] > 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

   Dann lässt sich die Menge aller reellwertigen Zufallsvariablen auf Ω mit $\mathbb{R}^3$ identifizieren. Wir wollen im Folgenden das Modell geometrisch interpretieren:

   (i) Beschreiben Sie die folgenden Objekte im Raum $\mathbb{R}^3$:

      (a) die Menge $\mathcal{P}$ aller äquivalenten risikoneutralen Maße,

      (b) die Menge $\widetilde{\mathcal{P}}$ aller absolutstetigen risikoneutralen Maße,

      (c) die Menge aller replizierbaren Auszahlungen.

   (ii) Unter welchen Voraussetzungen an $S^1(\omega_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, ist das Modell arbitragefrei?

   (iii) Finden Sie ein Beispiel für ein nichtreplizierbares Auszahlungsprofil.

3. Sei V die Auszahlung eines Portfolios mit Preis $\pi(V)$, $S^0 = 1 + r$ ein Bond mit Preis $\pi^0 = 1$. Die Preise für Call-Optionen der Form $(V - K)^+$ auf V mit $K \in \mathbb{R}$ seien bekannt. Benutzen Sie das "law of one price" (vgl. Vorlesung), um die Preise der folgenden Derivate zu berechnen:

   (i) $\min(V, K)$

(ii) Bei Fälligkeit in V konvertierbarer Bond: $\max(V, S^0)$.

(iii) "Butterfly spread"mit Auszahlung $f(V)$, wobei f durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x-a, & \text{für } a \le x \le \frac{a+b}{2} \\ b-x, & \text{für } \frac{a+b}{2} \le x \le b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für gegebene $0 \le \; a \le b$ definiert ist.