



ÜBUNGSBLATT 3

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $p := \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = 1 - \mathbb{P}[\{\omega_2\}]$ gegeben. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit zwei inländischen (Euro) und einer ausländischen (Dollar) Anlagemöglichkeiten gegeben durch die inländischen Preise $\bar{\pi} = (\pi^0, \pi^1, \pi^2)$ im Zeitpunkt $t = 0$ und die inländischen Werte $\bar{S} = (S^0, S^1, S^2)$ im Zeitpunkt $t = 1$:

$$\pi^0 = 1, \quad S^0 \equiv 1 + r, \quad (\text{inländisches Bankkonto}),$$

$$\pi^1 = s, \quad S^1(\omega) = \begin{cases} s \cdot (1 + \mu + \sigma_1), & \omega = \omega_1 \\ s \cdot (1 + \mu - \sigma_1), & \omega = \omega_2 \end{cases} \quad (\text{inländische Aktie}),$$

$$\pi^2 = w, \quad S^2 \equiv (1 + r^f)W, \quad (\text{ausländisches Bankkonto}),$$

wobei $r, r^f > 0$ den inländischen und ausländischen Zinssatz beschreiben und $\mu, \sigma_1 > 0$ mit $\mu \geq \sigma_1 - 1$ gilt. Der Wechselkurs (Euro/Dollar) zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $w > 0$ und zum Zeitpunkt $t = 1$ für $\gamma, \sigma_2 > 0$ mit $\gamma \geq \sigma_2 - 1$ gegeben durch:

$$W(\omega) = \begin{cases} w \cdot (1 + \gamma + \sigma_2), & \omega = \omega_1 \\ w \cdot (1 + \gamma - \sigma_2), & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

1. Sei das inländische Bankkonto als Numeraire festgesetzt. Unter welchen Voraussetzungen ist der Markt arbitragefrei? Berechnen Sie das inländische risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^d .
2. Sei der Markt arbitragefrei.
 - (i) Bestimmen Sie die Preise der drei Wertpapiere unter den folgenden Numeraires:
 - (a) inländische Währung
 - (b) inländisches Bankkonto (S^0)
 - (c) ausländische Währung
 - (d) ausländisches Bankkonto (S^2).
 - (ii) Geben Sie für (d) das entsprechende ausländische risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^f an.
 - (iii) Sei $V := \bar{\xi} \cdot \bar{S}$ eine Auszahlung zu einem Portfolio $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Erwartungswert des Returns $R(V) := \frac{V - \pi(V)}{\pi(V)}$ aus Sicht eines Inländers und eines Ausländers.
3. Sei der Markt wiederum arbitragefrei. w und W beschreiben - wie oben erwähnt - den Wechselkurs Euro/Dollar in den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$.
 - (i) Berechnen Sie den erwarteten Euro/Dollar-Wechselkursveränderung $\frac{W}{w}$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^d .

- (ii) Welche Dollar/Euro-Wechselkursveränderung $\frac{w}{W}$ würden Sie erwarten? Überprüfen Sie Ihre Behauptung!
- (iii) Wie lässt sich der scheinbare Widerspruch zwischen Aussage (i) und (ii) lösen?