



### ÜBUNGSBLATT 3

Sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$  mit  $p := \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = 1 - \mathbb{P}[\{\omega_2\}]$  gegeben. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit zwei inländischen (Euro) und einer ausländischen (Dollar) Anlagemöglichkeiten gegeben durch die inländischen Preise  $\bar{\pi} = (\pi^0, \pi^1, \pi^2)$  im Zeitpunkt  $t = 0$  und die inländischen Werte  $\bar{S} = (S^0, S^1, S^2)$  im Zeitpunkt  $t = 1$ :

$$\pi^0 = 1, \quad S^0 \equiv 1 + r, \quad (\text{inländisches Bankkonto}),$$

$$\pi^1 = s, \quad S^1(\omega) = \begin{cases} s \cdot (1 + \mu + \sigma_1), & \omega = \omega_1 \\ s \cdot (1 + \mu - \sigma_1), & \omega = \omega_2 \end{cases} \quad (\text{inländische Aktie}),$$

$$\pi^2 = w, \quad S^2 \equiv (1 + r^f)W, \quad (\text{ausländisches Bankkonto}),$$

wobei  $r, r^f > 0$  den inländischen und ausländischen Zinssatz beschreiben und  $\mu, \sigma_1 > 0$  mit  $\mu \geq \sigma_1 - 1$  gilt. Der Wechselkurs (Euro/Dollar) zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $w > 0$  und zum Zeitpunkt  $t = 1$  für  $\gamma, \sigma_2 > 0$  mit  $\gamma \geq \sigma_2 - 1$  gegeben durch:

$$W(\omega) = \begin{cases} w \cdot (1 + \gamma + \sigma_2), & \omega = \omega_1 \\ w \cdot (1 + \gamma - \sigma_2), & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

1. Sei das inländische Bankkonto als Numeraire festgesetzt. Unter welchen Voraussetzungen ist der Markt arbitragefrei? Berechnen Sie das inländische risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^d$ .
2. Sei der Markt arbitragefrei.
  - (i) Bestimmen Sie die Preise der drei Wertpapiere unter den folgenden Numeraires:
    - (a) inländische Währung
    - (b) inländisches Bankkonto ( $S^0$ )
    - (c) ausländische Währung
    - (d) ausländisches Bankkonto ( $S^2$ ).
  - (ii) Geben Sie für (d) das entsprechende ausländische risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^f$  an.
  - (iii) Sei  $V := \bar{\xi} \cdot \bar{S}$  eine Auszahlung zu einem Portfolio  $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^3$ . Berechnen Sie den Erwartungswert des Returns  $R(V) := \frac{V - \pi(V)}{\pi(V)}$  aus Sicht eines Inländers und eines Ausländers.
3. Sei der Markt wiederum arbitragefrei.  $w$  und  $W$  beschreiben - wie oben erwähnt - den Wechselkurs Euro/Dollar in den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = 1$ .
  - (i) Berechnen Sie den erwarteten Euro/Dollar-Wechselkursveränderung  $\frac{W}{w}$  unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^d$ .

- (ii) Welche Dollar/Euro-Wechselkursveränderung  $\frac{w}{W}$  würden Sie erwarten? Überprüfen Sie Ihre Behauptung!
- (iii) Wie lässt sich der scheinbare Widerspruch zwischen Aussage (i) und (ii) lösen?