Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Stochastische Finanzmathematik I Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 4

1. Wir betrachten ein Finanzmarktmodell auf $\Omega = \{\omega_1 \cdots \omega_N\}$, bestehend aus einem Bond mit Zinsrate $r = 0$ und einem risikobehafteten Wertpapier mit

$$\pi^1 = 1, \qquad 0 < S^1(\omega_1) < S^1(\omega_2) < \ldots < S^1(\omega_N).$$

Dabei nehmen wir an, daß jedes Szenario eine positive Wahrscheinlichkeit hat und das Modell arbitragefrei ist.
Man zeige: Es gibt Call-Optionen $C^1 \cdots C^{N-2}$ mit Preisen $\pi_C^1 \cdots \pi_C^{N-2}$, die den Markt vervollständigen. Dabei soll die Arbitragefreiheit erhalten bleiben.

2. Sei $C \geq 0$ ein Auszahlungsprofil in einem $\mathcal{Q}$-normalen Modell mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_i}[C] < +\infty$, für $i = 1, \ldots, n$. Ferner sei

$$\pi^{\mathcal{Q}}_{\min}(C) \;=\; \inf\left\{\mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R}\right\}.$$

die untere Grenze aller $\mathcal{Q}$-normalen Preise für C.
Für welche C gilt $\pi^{\mathcal{Q}}_{\min}(C) = \pi^{\mathcal{Q}}_{\max}(C)$? Wann gilt dies für jedes Auszahlungsprofil?
Hinweis: Für jeden Contingent Claim C definieren wir: C ist genau dann $\mathcal{Q}$-erreichbar, wenn gilt: $m + \xi Y =_{\mathcal{Q}} \frac{C}{1+r}$ für ein $m \in \mathbb{R}$ und ein $\xi \in \mathbb{R}^d$. Übertragen Sie die Eigenschaft der Erreichbarkeit von C aus Kapitel 2.3.2 auf das Modell mit $\mathcal{Q}$-normalen Preisen.

3. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $d+1$ Aktien, deren Preise in $t = 0, 1, \ldots, T$ ermittelt werden. Es bezeichnen $\bar{X} = (X_t^0, \ldots, X_t^d)_{t=0}^T$ den diskontierten Preisprozess der Aktien, $V = (V_t)_{t=0}^T$ den diskontierten Wertprozess zur Handelsstrategie $\bar{\xi}$ und $G = (G_t)_{t=0}^T$ den dazugehörigen Gewinnprozess.
Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung (Proposition 3.5): Für eine Handelsstrategie $\bar{\xi}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

   (i) $\bar{\xi}$ ist selbstfinanzierend.

   (ii) $\bar{\xi}_t \bar{X}_t = \bar{\xi}_{t+1} \bar{X}_t$, für $t = 1, \ldots, T-1$.

   (iii) $V_t = V_0 + G_t$ für alle t.