Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Stochastische Finanzmathematik I Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 5

1. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei eine Zufallsvariable S der Form

$$S = \exp(\sigma Z + \mu)$$

definiert, wobei $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ und Z standardnormalverteilt ist. Ein solches S nennt man auch *log-normalverteilt*.

(i) Berechnen Sie die Dichte der Verteilung von S und sämtliche Momente $\mathbb{E}[S^p]$, $p > 0$.

(ii) Geben Sie für das Ein-Perioden-Modell bestehend aus einem Bond mit Zinsrate $r = 0$ und einer Anlage mit Startpreis π und Endpreis S explizit ein risikoneutrales Maß an.

2. In der Vorlesung wurden der *Wertprozess* V zu einer Anlagestrategie $\bar{\xi}$ über

$$V_0 \;=\; \bar{\xi}_1 \cdot \bar{X}_0 \quad \text{und} \quad V_t \;=\; \bar{\xi}_t \cdot \bar{X}_t \quad \text{für} \quad t \;=\; 1, \ldots, T$$

und der zugehörige *Gewinnprozess* G über

$$G_0 \;=\; 0 \quad \text{und} \quad G_t \;=\; \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \quad \text{für} \quad t \;=\; 1, \ldots, T$$

definiert. Zusätzlich führen wir noch den *Kostenprozess* C gegeben durch

$$C_t \;:=\; V_t - G_t \quad \text{für} \quad t \;=\; 0, \ldots, T$$

ein. Zeigen Sie:

(i) Für $t = 1, \ldots, T$ gibt C_t in der Tat die in den Perioden $0, \ldots, t-1$ aufgelaufenen (abdiskontierten) Kosten an. Wie ist C_0 zu interpretieren?

(ii) Die Strategie $\bar{\xi}$ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn ihr Kostenprozess konstant ist, d.h. falls $C_t = C_0$, $\mathbb{P}$-f.s., für $t = 0, \ldots, T$.

3. Es gelte die gleiche Situation wie in der Aufgabe 2 Serie 2. Das heißt ein Finanzmarktmodell auf $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, bestehend aus einem Bond mit Zinsrate $r = 0$ und einem risikobehafteten Wertpapier mit

$$\pi^1 = 1, \qquad 0 < S^1(\omega_1) < S^1(\omega_2) < S^1(\omega_3), \qquad P(\omega_i) > 0 \;\; (i = 1, 2, 3).$$

(i) Man zeige: Für alle Auszahlungsprofile C wird das Supremum $\sup_{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}} \widetilde{E}[C]$ in einem $\widehat{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ angenommen, d.h.

$$\sup_{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}} \widetilde{E}[C] = \widehat{E}[C].$$

(ii) Man beweise direkt: Wird das Supremum $\sup\limits_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[C]$ in einem $P^* \in \mathcal{P}$ angenommen, so ist die Abbildung $\widetilde{P} \to \widetilde{E}[C]$ konstant auf $\widetilde{\mathcal{P}}$.