Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Stochastische Finanzmathematik I Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 6

1. Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben.

   (i) Seien $Y_1, \ldots, Y_T$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $Y_i > 0$, $\mathbb{P}$-f.s., und $\mathbb{E}[Y_i] = 1$. Zeigen Sie, dass dann

   $$X_0 \;:=\; 1, \qquad X_t \;:=\; \prod_{s=1}^{t} Y_s, \quad t = 1, \ldots, T,$$

   ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(X_0, \ldots, X_t)$, $t = 0, \ldots, T$, ist.

   (ii) Seien $W_1, \ldots, W_T$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Für Konstanten $S_0^1 > 0$, $\sigma_k \neq 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, T)$ betrachten wir den Preisprozess

   $$S_t^1 \;:=\; S_0^1 \exp\left(\sum_{k=1}^{t} (\sigma_k W_k + \alpha_k)\right), \qquad t = 1, \ldots, T.$$

   Ferner sei $S_t^0 = (1+r)^t$, $t = 0, \ldots, T$, mit einer vorgegebenen Zinsrate $r > 0$. Für welche Werte der Konstanten α_k ist der diskontierte Preisprozess

   $$X_t \;:=\; \frac{S_t^1}{S_t^0}, \qquad t = 1, \ldots, T,$$

   ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(X_0, \ldots, X_t)$, $t = 1, \ldots, T$?

2. Eine „Wahl-Option“(chooser option) gibt dem Käufer das Recht, in einem vorher festgelegten Zeitpunkt t $(0 < t_0 < T)$ zwischen einer Call- und einer Put-Option mit Ausübungspreis K und Laufzeit T auf dasselbe Wertpapier mit Preisprozess $(S_t^i)_{0 \leq t \leq T}$ zu wählen. Dabei nehmen wir an, dass sich der Käufer für diejenige Option entscheidet, die im Zeitpunkt t_0 den höheren Preis hat.

   (i) Geben Sie das Auszahlungsprofil einer „Wahl-Option“an.

   (ii) Zeigen Sie: In einem arbitragefreien Modell mit Numéraire $S_t^0 = (1+r)^t$, $t = 0, \ldots, T$, $r > -1$, in dem die Preise der Call- und Put-Optionen bereits bekannt sind, gilt für den Preis $\pi(C^{\text{Wahl}})$ der „Wahl-Option“:

   $$\pi\left(C^{\text{Wahl}}\right) \;=\; \pi\left(C^{\text{Call}}\right) + \pi\left(C^{\text{Put}}\right),$$

   wobei C^{Call} eine Call-Option auf S^i mit Ausübungspreis K und Laufzeit T und C^{Put} eine Put-Option auf S^i mit Ausübungspreis $K(1+r)^{t_0 - T}$ und Laufzeit t_0 sind.

3. Beweisen Sie Theorem 1.3.25 aus dem Skript.