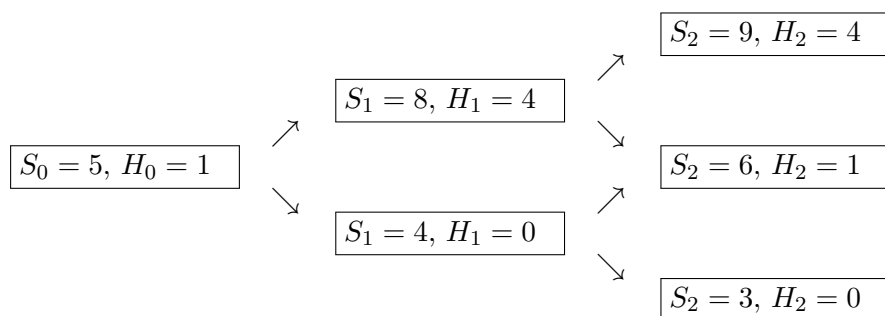




ÜBUNGSBLATT 8

1. Wir betrachten ein Finanzmarktmodell mit Zinssatz $r = 0$ und einer Aktie. Ihr Preisprozess S sowie das Auszahlungsprofil einer amerikanischen Option H sei gegeben durch



- 1) Berechne den in den verschiedenen Zeitpunkten mindestens benötigten Kapitalbedarf zur perfekten Absicherung der amerikanischen Option.
 - 2) Bei Ausübung in welchen Knoten des obigen Graphen wird ein Käufer der amerikanischen Option dem Verkäufer einen risikofreien Gewinn ermöglichen?
 - 3) Wann wird ein Käufer von seiner Option Gebrauch machen, wenn er alle möglichen Szenarien für gleichwahrscheinlich hält?
2. Der Black-Scholes Preis einer Call-Option mit Ausübungspreis K und Fälligkeit $T > 0$ ist im Zeitpunkt $t \in [0, T)$ bei Aktienpreis $x > 0$ durch

$$v(x, T-t) = x\Phi(d_+(x, T-t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x, T-t))$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $r \in \mathbb{R}$ die risikolose Zinsrate und $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie. Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung; die Funktionen d_+ und d_- sind durch

$$d_{\pm}(x, \tau) = \frac{\log \frac{x}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

definiert.

- (i) Berechnen Sie die „Greeks“:

(a) „Delta“: $\Delta_{T-t} := \frac{\partial}{\partial x} v(x, T-t),$

(b) „Gamma“: $\Gamma_{T-t} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, T-t),$

(c) „Theta“: $\Theta_{T-t} := \frac{\partial}{\partial t} v(x, T-t),$

(d) „Vega“: $\mathcal{V}_{T-t} := \frac{\partial}{\partial \sigma} v(x, T-t).$

(ii) Verifizieren Sie, dass v die partielle Differentialgleichung

$$\left[\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right] v(x, \tau) = rv(x, \tau) \quad \text{auf } (0, \infty) \times (0, T]$$

löst und der Randbedingung

$$v(x, T - t) \rightarrow (x - K)^+ \quad \text{für } t \rightarrow T$$

genügt.

3. Wir betrachten wieder den Black-Scholes-Rahmen aus der Aufgabe 2. Sei $\tau := T - t > 0$. Zeigen Sie, dass für $x, y > 0$ mit $x \neq y$ folgende Ungleichungen gelten, und interpretieren Sie diese:

(i)

$$|v(x, \tau) - v(y, \tau)| < |x - y|.$$

(ii)

$$\frac{v(x, \tau) - v(y, \tau)}{v(y, \tau)} > \frac{x - y}{y} \quad \text{für } x > y.$$

(iii)

$$\frac{v(x, \tau) - v(y, \tau)}{v(y, \tau)} < \frac{x - y}{y} \quad \text{für } x < y.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 (i).