Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Stochastische Finanzmathematik I Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 8

1. Wir betrachten ein Finanzmarktmodell mit Zinssatz $r = 0$ und einer Aktie. Ihr preisprozeß S sowie das Auszahlungsprofil einer amerikanischen Option H sei gegeben durch

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{S_2 = 9,\ H_2 = 4} \\
 & \boxed{S_1 = 8,\ H_1 = 4} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\boxed{S_0 = 5,\ H_0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{S_2 = 6,\ H_2 = 1} \\
 & \boxed{S_1 = 4,\ H_1 = 0} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{S_2 = 3,\ H_2 = 0}
\end{tikzcd}
$$

1) Berechne den in den verschiedenen Zeitpunkten mindestens benötigten Kapitalbedarf zur perfekten Absicherung der amerikanische Option.

2) Bei Ausübung in welchen Knoten des obigen Graphen wird ein Käufer der amerikanischen Option dem Verkäufer einen risikofreien Gewinn ermöglichen?

3) Wann wird ein Käufer von seiner Option Gebrauch machen, wenn er alle möglichen Szenarien für gleichwahrscheinlich hält?

2. Der Black-Scholes Preis einer Call-Option mit Ausübungspreis K und Fälligkeit $T > 0$ ist im Zeitpunkt $t \in [0, T)$ bei Aktienpreis $x > 0$ durch

$$v(x, T-t) \;=\; x\Phi(d_+(x, T-t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x, T-t))$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $r \in \mathbb{R}$ die risikolose Zinsrate und $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie. Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung; die Funktionen d_+ und d_- sind durch

$$d_\pm(x, \tau) \;=\; \frac{\log \frac{x}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

definiert.

(i) Berechnen Sie die „Greeks“:

(a) „Delta“: $\Delta_{T-t} \;:=\; \frac{\partial}{\partial x} v(x, T-t)$,

(b) „Gamma“: $\Gamma_{T-t} \;:=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, T-t)$,

(c) „Theta“: $\Theta_{T-t} \;:=\; \frac{\partial}{\partial t} v(x, T-t)$,

(d) „Vega“: $\mathcal{V}_{T-t} \;:=\; \frac{\partial}{\partial \sigma} v(x, T-t)$.

(ii) Verifizieren Sie, dass v die partielle Differentialgleichung

$$\left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right] v(x,\tau) \;=\; rv(x,\tau) \quad \text{auf} \quad (0,\infty)\times(0,T]$$

löst und der Randbedingung

$$v(x,T-t) \;\to\; (x-K)^+ \quad \text{für} \quad t\to T$$

genügt.

3. Wir betrachten wieder den Black-Scholes-Rahmen aus der Aufgabe 2. Sei $\tau := T-t > 0$. Zeigen Sie, dass für $x,y>0$ mit $x\neq y$ folgende Ungleichungen gelten, und interpretieren Sie diese:

(i)

$$|v(x,\tau)-v(y,\tau)| \;<\; |x-y|.$$

(ii)

$$\frac{v(x,\tau)-v(y,\tau)}{v(y,\tau)} \;>\; \frac{x-y}{y} \quad \text{für } x>y.$$

(iii)

$$\frac{v(x,\tau)-v(y,\tau)}{v(y,\tau)} \;<\; \frac{x-y}{y} \quad \text{für } x<y.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 (i).