Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Guanxing Fu

Übungsblatt 9

1. Es sei $Z_t^{\text{Call}} = \left(X_t^i - \frac{K}{S_t^0}\right)^+$ eine amerikanische Call-Option auf das i-te Wertpapier in einem vollständigen, arbitragefreien Finanzmarktmodell, wobei S_t^0 monoton wachsend in t und vorhersehbar ist. Zeigen Sie:

   (i) Die Snellsche Einhüllende zu Z^{Call} stimmt mit dem Wertprozess der zugehörigen europäischen Call-Option $V_t = \mathbb{E}^*\left[Z_T^{\text{Call}} \,|\, \mathcal{F}_t\right]$ überein.

   (ii) $\tau \equiv T$ ist eine optimale Ausübungszeit für Z.

2. Sei (Z_t) ein adaptierter Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ und (U_t) die entsprechende Snellsche Einhüllende. Weiter sei $\mathcal{T}_{t,T}$ die Menge aller Stoppzeiten mit Werten in $\{t, t+1, \ldots, T\}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$U_t = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[Z_\nu \,|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[Z_{\nu_t} \,|\, \mathcal{F}_t\right], \qquad 0 \le t \le T,$$

   mit $\nu_t := \inf\{j \ge t \,|\, U_j = Z_j\}$.

3. Sei (Z_t) ein adaptierter Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ mit $Z_t = \psi(t, X_t)$, wobei $\psi : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{R}$ und (X_t) eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P ist. Bestimmen Sie die Snellsche Einhüllende (U_t) von (Z_t).