Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Angewandte Finanzmathematik

Prof. Dr. Ulrich Horst
Dr. Paulwin Graewe

ANALYSIS II* | ÜBUNGSBLATT 2 | SOMMERSEMESTER 2018

AUFGABE 1. Es seien $f : U \subset \mathbb{R}^n \to E$ und $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $h \cdot f : U \subset \mathbb{R}^n \to E$ ist differenzierbar und für alle $x_0 \in U$ gilt:

$$D(h \cdot f)(x_0) = h(x_0) \cdot Df(x_0) + Dh(x_0) \cdot f(x_0).$$

b) Wenn die Funktion h auf U keine Nullstelle hat, so ist $\frac{1}{h} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x_0 \in U$ gilt:

$$D\left(\frac{1}{h}\right)(x_0) = -\frac{1}{h(x_0)^2} \cdot Dh(x_0).$$

AUFGABE 2. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := 3x^3 - y^2$.

a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $x_0 := (1, 1)$ in Richtung des Vektors $a = (0, 2)$.

b) Geben Sie die Richtung $b \in \mathbb{R}^2$, $\|b\| = 1$, mit der größten Richtungsableitung $\nabla_b f(x_0)$ an.

AUFGABE 3. Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen f_1, f_2 und f_3 differenzierbar sind und geben Sie jeweils das Differential in einem beliebigen Punkt des Definitionsbereiches an.

a) $f_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_1(x, y) := \langle \phi(x), y \rangle, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

b) $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_2(x) := \langle \phi(x), x \rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_3(x, y, z) := \det \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}^3.$$

AUFGABE 4. Ein Funktion $f \colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ besitzt in $u \in U$ die *partielle Ableitung* nach der i-ten Koordinate, falls

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) := \nabla_{x_i} f(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + te_i) - f(u)}{t}$$

existiert.

a) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist, aber die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$ nicht stetig sind.

b) Es sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass in $(0,0)$ alle Richtungsableitungen von g existieren, aber g in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Abgabe: Donnerstag, den 03.05.2018, in der Vorlesung.

Bitte bearbeiten Sie jeder Aufgabe auf einem separaten Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Geben Sie auch die Übungsgruppe an, in welcher Sie Ihre Abgabe abholen möchten.