Aufgabe 3. Wir definieren induktiv folgende Abbildungen $P_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$P_2(r, \varphi_1) := (r\cos(\varphi_1), r\sin(\varphi_1)),$$
$$P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) := (P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos(\varphi_n), r\sin(\varphi_n)).$$

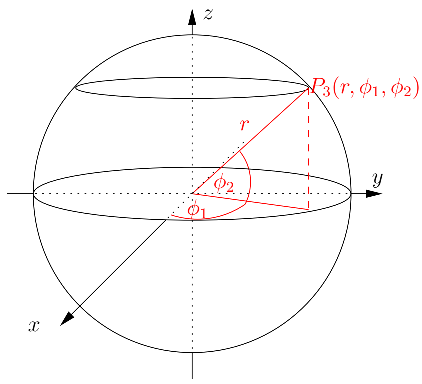
a) Ist $P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus?

b) Untersuchen Sie, um welche Punkte des $\mathbb{R}^n$ die Abbildung $P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

c) Geben Sie für jeden der unter b) bestimmten Punkte $p \in \mathbb{R}^n$ möglichst maximale offene Mengen U um p und V um $P_n(p)$ an, so dass $P_n|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Geometrisch Bedeutung von P_3: Die *verallgemeinerten Polarkoordinaten* beschreiben einen Punkt des $\mathbb{R}^3$ dadurch, dass sie angeben, wie weit er vom Ursprung entfernt ist und wo auf der (zweidimensionalen) Sphäre vom entsprechenden Radius er liegt.

Man rechnet leicht nach, dass ein Punkt $(x, y, z) = P_3(r, \phi_1, \phi_2)$ die Norm r hat, d. h. er liegt auf der Sphäre vom Radius r. Die Koordinaten ϕ_1, ϕ_2 geben nun an, wo auf dieser Sphäre dieser Punkt liegt. Wir sehen zunächst, dass die z-Koordinate nicht von ϕ_1 abhängt, der entsrechende Punkt liegt also in der Ebene $z = r\sin\phi_2$. Durch Nachrechnen sieht man dann, dass (x, y, z) in dieser Ebene auf einem Kreis vom Radius $r^2\sin^2(\phi_2)$ liegt. Weiterhin bestimmt ϕ_2 die z-Koordinate sowie den Radius des Kreises, auf dem (x, y) liegt. Also sehen wir insgesamt:



- ϕ_1 beschreibt den Winkel zwischen der x-Achse und der Geraden durch den Ursprung und $(\sin\phi_1, \sin\phi_1, 0)$,
- ϕ_2 beschreibt den Winkel zwischen den Geraden durch den Gerade durch den Ursprung und $(\sin\phi_1, \sin\phi_1, 0)$ bzw. $(\cos\phi_1\cos\phi_2, \sin\phi_1\cos\phi_2, \sin\phi_2)$.

Lösung.

a) Man sieht leicht, dass die Abbildung P_{n+1} auf $\mathbb{R}^n$ kein Diffeomorphismus sein kann, da sie nicht injektiv ist. Beispielsweise ist stets

$$P_{n+1}(r, \phi_1, ..., \phi_n) = P_{n+1}(r, \phi_1, ..., \phi_{n-1}, \phi_n + 2\pi).$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine Abbildung genau dann ein lokaler Diffeomorphismus um einen Punkt ist, wenn ihr Differential in diesem Punkt invertierbar ist. Wir berechnen also zunächst das Differential von P_{n+1}.

Wir vereinbaren für den restlichen Beweis die folgende Bezeichnung:

$$\phi^{(k)} = (\phi_1, ..., \phi_k).$$

Aus der induktiven Definition von P_{n+1} sowie aus der komponentenweise Differentiation und der Produktregel schließen wir, dass

$$\begin{aligned} DP_{n+1}(r,\phi^{(n)}) &= \begin{pmatrix} DP_n(r,\phi^{(n-1)}))\cos\phi_n & -\sin\phi_n P_n(r,\phi^{(n-1)}) \\ \sin\phi_n \quad 0 \quad \dots \qquad 0 & r\cos\phi_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & D_\phi[P_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n] \\ \sin\phi_n \quad 0 \quad \dots \quad 0 & r\cos\phi_n. \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die beiden Zeilen lediglich unterschiedliche Darstellungen sind (kein weiterer Rechenschritt) und wir mit D_ϕ das Differential bezüglich der ϕ-Variablen bezeichnen, d. h. r als Konstante behandeln.

Wir entwickeln nun die Determinante nach der letzten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} \det DP_{n+1}(r,\phi^{(n)}) = (-1)^{n+1+1}\sin\phi_n \det D_\phi[P_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n] \\ + (-1)^{2(n+1)} r\cos\phi_n \det[\cos\phi_n DP_n(r,\phi^{(n-1)})]. \end{aligned}$$

Es bleibt also, die Determinante von $D_\phi[P_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n]$ zu berechnen. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial r}(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n &= \frac{\cos\phi_n}{r}P_n(r,\phi^{(n-1)}), \\ \frac{\partial}{\partial\phi_n}[P_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n] &= -\sin\phi_n P_n(r,\phi^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Also stimmen die erste Spalte von $DP_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n$ und die letzte von $D_\phi[P_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n]$ bis auf den Faktor $-r\tan\phi_n$ überein und man sieht, dass die übrigen Spalten übereinstimmen. Wenn wir nun voraussetzen, dass $\cos\phi_n \neq 0$ (anderenfalls ist die Behauptung trivialerweise erfüllt), so folgt aus den Rechenregeln für Determinanten, dass

$$\begin{aligned} \det D_\phi[P_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n] &= (-1)^{n-1}(-r\tan\phi_n)\det[DP_n(r,\phi^{(n-1)})\cos\phi_n] \\ &= (-1)^n r\tan\phi_n \cos^n\phi_n \det DP_n(r,\phi^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Somit folgt, dass

$$\begin{aligned} \det DP_{n+1}(r,\phi^{(n)}) &= \Big(\sin\phi_n r\tan\phi_n\cos^n\phi_n + r\cos^{n+1}\phi_n\Big)\det DP_n(r,\phi^{(n-1)}) \\ &= \Big(\sin^2\phi_n\cos^{n-1}\phi_n + \cos^{n+1}\phi_n\Big) r\det DP_n(r,\phi^{(n-1)}) \\ &= \Big((1-\cos^2\phi_n)\cos^{n-1}\phi_n + \cos^{n+1}\phi_n\Big) r\det DP_n(r,\phi^{(n-1)}) \\ &= r\cos^{n-1}\phi_n \det DP_n(r,\phi^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Mit $\det DP_2(r,\phi_1) = r$ (Vorlesung) erhält man damit induktiv:

$$\det DP_{n+1}(r,\phi^{(n-1)}) = r^n\cos\phi_2\cdot\cos^2\phi_3\cdots\cos^{n-1}\phi_n.$$

Wir schließen hieraus, dass die Determinante des Differentials von P_{n+1} genau dann nicht verschwindet, wenn

$$r \neq 0 \text{ und } \phi_2,\dots,\phi_n \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

c) Um eine maximale offene Menge zu finden, auf der P_{n+1} ein Diffeomorphismus ist, suchen wir eine maximale offene Menge, auf der das Differential vollen Rang hat und P_{n+1} injektiv ist. Aus b) folgern wir, dass der Definitionsbereich für $\phi_2, ..., \phi_n$ keine Werte aus $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ enthalten darf, d. h. jede dieser Variablen darf maximal aus einem Intervall vom Typ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi)$ kommen, $k \in \mathbb{Z}$. Die maximalen offenen Mengen, auf denen P_{n+1} ein Diffeomorphismus ist, sind dann gegeben durch

$$U = (0, \infty) \times (\phi_0, \phi_0 + 2\pi) \times \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right)^{n-1}, \quad \phi_0 \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen nun induktiv, dass P_{n+1} auf dieser Menge injektiv ist. Wir bemerken zunächst, dass Punkt gilt $\|P_{n+1}(r, \phi^{(n)})\| = r$ und so für jeden Bildpunkt r eindeutig festliegt. Dann sieht man sofort, dass P_2 auf der oben beschriebenen Menge injektiv ist (Induktionsanfang). Wir führen nun den Induktionsschritt. Ist

$$\begin{aligned} P_{n+1}(r, \phi^{(n)}) &= (P_n(r, \phi^{(n-1)}) \cos\phi_n, r \sin\phi_n) \\ &= (P_n(s, \psi^{(n-1)}) \cos\psi_n, s \sin\psi_n) = P_{n+1}(s, \psi^{(n)}), \end{aligned}$$

so sieht man sofort $r = s$ und, da sin auf $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi)$ injektiv ist, $\phi_n = \psi_n$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung $\phi^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}$.

Man sieht andererseits aus den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen leicht ein, dass dies in der Tat die *maximale* offene Menge mit diesen Eigenschaften ist.