Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Paulwin Graewe
Dr. Jana Bielagk

STOCHASTIK (KOMBIBACHELOR) BLATT 5 WINTERSEMESTER 2018/19

AUFGABE 1 (2 Punkte). Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit Massenfunktion $p_X(k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

AUFGABE 2 (4 Punkte). Beim Würfelspiel „Die böse 3“ beträgt der Einsatz 3 Euro. Es werden zwei faire Würfel geworfen. Fällt keine 3, erhält der Spieler die Augensummen in Euro ausgezahlt. Fällt allerdings mindestens eine 3, so muss er neben dem Einsatz zusätzlich die geworfene Augensumme einzahlen.

a) Berechnen Sie die Verteilung des Gewinns.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit eines strikt positiven Gewinns.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns. Ist das Spiel fair?

AUFGABE 3 (6 Punkte). Wir betrachten den n-fachen Wurf eines fairen Würfels.

a) Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Sechsen in $n = 25$ Würfen.

  i.) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

  ii.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \leq \sigma_X)$.

  iii.) Welche Anzahl an Sechsen ist die wahrscheinlichste?

b) Die Zufallsvariable Y_n bezeichne die größte geworfene Augenzahl.

  i.) Bestimmen Sie abhängig von $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y_n \leq k)$ für $k = 1, \ldots, 6$.

  ii.) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y_n.

  iii.) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = 6$.

AUFGABE 4 (4 Punkte). Ein Teilchen bewegt sich zufällig auf den ganzzahligen Punkten der Zahlengeraden und befolgt dabei folgende Regeln: Es startet bei 0 und geht jeden Schritt mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ eine Einheit nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ eine Einheit nach links. Die Schritte sind unabhängig voneinander. Die Zufallsvariable X_n gebe die Position nach n Schritten an.

a) Ermitteln Sie die Verteilung sowie den Erwartungswert von X_5 und X_6.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kehrt das Teilchen innerhalb der ersten 5 Schritte mindestens einmal nach 0 zurück? Für welches p ist diese Rückkehrwahrscheinlichkeit am größten?

Abgabe: Montag, den 26.11.2018, zu Beginn der Vorlesung.
Bitte geben Sie Ihren Namen und den Wochentag Ihrer Übungsgruppe an.